Ref :
- Bernis p.121
- Charles, Mbekhta, Queffélec Intégration, analyse complexe et an. hilbertienne p.121

Developpement : Espace de Bergman du disque unité :

leçons 201 205 208 213 234 235 243 245

Théorème 1 :

On pose $\mathbb{D} = B(0,1[$ le disque unité ouvert complexe, et $H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman du disque unité (constitué par définition des fonctions holomorphes de carré intégrable sur $\mathbb{D}$). Il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$, dont une base hilbertienne est donnée par $\left\{ e_n := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Remarques : . H est un espace vectoriel comme intersection de deux espaces vectoriels.
. Les espaces de Bergman jouent un rôle important dans l'étude des opérateurs de Toeplitz.

Preuve :

▶ Étape 1 : Sur H, la topologie liée à $\|\cdot\|_2$ (provenant de $L^2(\mathbb{D})$) est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, induite par $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Soit $f \in H$, soit K un compact de $\mathbb{D}$ tq $d(K, \Gamma)$ (désignant la distance de K au cercle unité) soit supérieur à $r > 0$. Ainsi, $\forall z \in K$, $d(z, \Gamma) > r$. On développe f en série entière au voisinage de z :

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (w-z)^n$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
\int_{B(z,r]} f(w)\,dw &= \int_{B(z,r]} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_{B(z,r]} (w-z)^n\,dw \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \rho\, d\theta\, d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \rho^{n+1} \left(\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta \right) d\rho \\
&= f(z) \cdot \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \\
&= r^2 \cdot \pi \cdot f(z)
\end{aligned}$$

) Fubini car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n = f$ et $\int_{B(z,r]} f(w)\,dw < +\infty$

) chang. de var. polaire

) $\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta = 0$ ssi $n \neq 0$.

Donc $\forall z \in K$, on a par Cauchy-Schwarz :

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r^2 \pi} \int_{B(z,r]} |f(w)|\,dw \leq \frac{1}{r^2\pi} \left(\iint_{B(z,r]} |f(w)|^2\,dw \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(z,r]} 1 \cdot dw \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{r \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \|f\|_2 .$$

Ainsi, $\forall K$ compact de $\mathbb{D}$, $\max\limits_{z\in K} |f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r} \cdot \|f\|_2$

▶ Étape 2 : Montrons que H est un espace de Hilbert (c'est à dire est complet pour $\|\cdot\|_2$).

* H est un espace vectoriel comme intersection d'espace vectoriel.

* ① Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans H, donc pour $\|\cdot\|_2$.

Soit K compact de $\mathbb{D}$. $\exists\, r>0$ tq $d(K,\Gamma)>r$, on a alors $\forall z\in K$:

$$|f_n(z)-f_m(z)| \leqslant \frac{1}{r\cdot\sqrt{\pi}} \underbrace{\|f_n-f_m\|_2}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ m\to+\infty \\ 0}}$$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur K : Elle converge uniformément vers une fonction continue f sur K. On obtient donc sur $\mathbb{D}$ une limite f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, holomorphe comme limite d'une suite convergeant uniformément sur tout compact.

② Il reste à montrer que $f\in L^2(\mathbb{D})$ et $(f_n)\longrightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{D})$.

Soit $\varepsilon>0$. (f_n) étant de Cauchy dans H, $\exists N>0$ tq

$$\forall n,m \geqslant N, \quad \int_{\mathbb{D}} |f_n-f_m|^2\, d\lambda < \varepsilon^2$$

En laissant $m\longrightarrow+\infty$, on a par le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n-f|^2\, d\lambda \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n-f_m|^2\, d\lambda < \varepsilon^2$$

Ainsi $f_n-f\in L^2(\mathbb{D})$ donc $f\in L^2(\mathbb{D})$ et de plus, $\|f_n-f\|_2<\varepsilon$ pour $n\geqslant N$.

Ainsi H est un espace de Hilbert.

▶ Étape 3 : On exhibe à présent une base hilbertienne de H :

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$ et $e_n : \begin{array}{l}\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z\longmapsto a_n z^n\end{array}$, fonction dans H.

① Famille orthonormale

Commençons par montrer que la famille $\{e_n ; n\in\mathbb{N}\}$ famille orthonormale de H :

Soit $p,q\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle e_p,e_q\rangle &= a_p\cdot a_q\cdot \int_{\mathbb{D}} z^p\, \bar{z}^q\, dz \\ &= a_p\cdot a_q\cdot \int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^{p+q+1} e^{i(p-q)\theta}\, d\theta\, d\rho \\ &= a_p\cdot a_q\cdot \int_0^1 \rho^{p+q+1} d\rho \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\theta}\, d\theta\end{aligned}$$

Ainsi $p\neq q \Rightarrow \langle e_p,e_q\rangle = 0$.

sinon, $\langle e_p,e_p\rangle = 2\pi\cdot a_p^2\cdot \int_0^1 \rho^{2p+1} d\rho = 1$.

② Famille totale

Soit $f \in H$ tq $f \in \text{Vect}\{e_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}^{\perp}$.

Par la formule intégrale de Cauchy, $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k$

où $a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta$, $r \in]0,1[$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
0 = \langle f, e_n \rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot \int_{\mathbb{D}} f(z) \cdot \bar{z}^n \, dz \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot r^n e^{-i\theta n} \, d\theta . r . dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-i\theta n}\, d\theta \right) r . dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n \left(2\pi . r^n . a_n \right) r . dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, 2\pi . a_n . \int_0^1 r^{2n+1}\, dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \pi \cdot a_n \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot a_n
\end{aligned}$$

et donc $a_n = 0$. Ainsi, f est nulle.

Finalement, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H.

Corollaire:

Toute application f de H s'écrit $f = \int_{\mathbb{D}} f(w)\, K(\cdot, w)\, d\lambda(w)$

où $K : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,w) \longmapsto \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$. On dit que H admet comme noyau reproduisant K, appellé noyau de Bergman.

Preuve:

$\forall z \in \mathbb{D}$, $\ell_z : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto f(z)$ est continue, par étape 1. Par le thm de représentat° de Riesz, $\exists !\, k_z$ de H tq $\ell_z = \langle \cdot , k_z \rangle$.

Posons $K : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,w) \longmapsto \overline{k_z(w)}$

$K(z,\cdot) = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle k_z, e_n \rangle e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, k_z \rangle \overline{e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\, \overline{e_n}$.

La convergence de ces séries se fait dans H, mais par la partie 1, ces séries convergent uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, $\forall z$.

En particulier :

$$\forall (z,w) \in \mathbb{D}^2, \quad K(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} (z\bar{w})^n$$
$$= \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$$

U ouvert connexe de $\mathbb{C}$
$f \in H(U)$
γ chemin fermé
$z \notin \gamma$.
Alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$\xrightarrow{\text{appli}}$ $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Soit $r > 0$,
Soit $a \in U$ tq $\mathbb{D}(a,r) \subset U$.
$\forall z \in \mathbb{D}(a,r)$, $\left| \frac{z-a}{\gamma(\theta)-a} \right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$
γ le cercle(a,r).

donc il y a cv uniforme sur $[0,2\pi]$ de $\frac{(z-a)^n}{(\gamma(\theta)-a)^{n+1}}$ vers $\frac{1}{\gamma(\theta)-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\gamma(\theta)-a}} \cdot \frac{1}{\gamma(\theta)-z}$

et comme $f\circ\gamma$ continue, on a cv unif. de la série
$\sum_{n=0}^{+\infty} f(\gamma(\theta)) \cdot \frac{(z-a)^n}{(\gamma(\theta)-a)^{n+1}}$ sur $[0,2\pi]$ ce qui permet d'effectuer

une inversion de $\int$ et Σ :

$$\forall z \in \mathbb{D}(a,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

$c_n = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$ donc f analytique sur U.